**Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática**

**Examen 5 de julio de 2016**

**Bloque Lógica de Primer Orden**

**Ejercicio 1.** Formalizar en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados:

1. *No todo fruto seco tiene cascara.*
2. *A nadie le gusta el garbanzo si es un fruto seco.*
3. *A Berto le gustan los frutos secos solo si no tienen cascara.*

Solución:

S(x) ≡ x es un fruto seco

C(x) ≡ x tiene cascara

G(x,y) ≡ a x le gusta y

a≡ Berto

b≡ garbanzo

1. No todo fruto seco tiene cascara.
   * ¬∀**x(S(x)** → **C(x))**
   * ∃**x(S(x)** ∧¬ **C(x))**
2. A nadie le gusta el garbanzo si es un fruto seco.
   * **S(b)** →¬∃**x(G(x,b))**
   * ∃**x(G(x,b))** → ¬**S(b)**
3. A Berto le gustan los frutos secos solo si no tienen cascara.
   * ∀**x(G(a,x)** ∧  **S(x)** →¬ **C(x))**
   * ∀**x(C(x)**→¬ **(G(a,x)** ∧  **S(x)))**
   * ¬∃**x(G(a,x)** ∧  **S(x)** ∧ **C(x))**

**Ejercicio 2**. Definir una interpretación que demuestre, sobre D = {5,7}, si la siguiente argumentación es consecuencia lógica. Justifica la respuesta mediante el desarrollo completo de la interpretación de fórmulas.

{ ¬P(a) , ¬Q(a,b) ∧ ¬Q(b,a) , ∀x(Q(x,x) → P(x)) } |=? ∀x∀y ¬Q(x,y)

**Solución:**

{ ¬P(a) , ¬Q(a,b) ∧ ¬Q(b,a) , ∀x(Q(x,x) → P(x)) } |=? ∀x∀y ¬Q(x,y)

A1 A2 A3 B

\*) Buscamos una interpretación I tal que I(A1) = I(A2) = I(A3) = V y I(B) = F

\*) El lenguaje en que está coinstruída la argumentación es:

a , b símbolos de constantes

P símbolo de predicado unario

Q símbolo de predicado binario

\*) El dominio de I es, como sugiere el enunciado D = {5,7}

I(a) = 5 , I(b) = 7 por ejemplo

\*) I(A1) = I(¬P(a)) = V ⎯→ I(P(a)) = F ⎯→ PD(I(a)) = F PD(5) = F

\*) I(A2) = I( ¬Q(a,b) ∧ ¬Q(b,a) ) = V I( ¬Q(a,b) ) = V y QD(5,7) = F

I( ¬Q(b,a) ) = V QD(7,5) = F

\*) I(A3) = I( ∀x(Q(x,x) → P(x)) ) = V

x = a I( Q(a,a) → P(a)) = V como I(P(a)) = F I( Q(a,a) ) = F QD(5,5) = F

x = b I( Q(b,b) → P(b)) = V (1)

\*) falta por determinar QD(7,7) y PD(7)

\*) I(B) = I( ∀x∀y ¬Q(x,y) ) = F ∃x ∃y Q(x,y) = V (2)

Tomamos QD(7,7) = V y PD(7) = V

\*) Hemos encontrado una interpretación con las condiciones buscadas: PD = {7} , QD = { (7,7) }

⇒ Queda probado que no es consecuencia lógica

**Ejercicio 3**.

1. Demostrar mediante **deducción natural**:

T [ ¬ ∀x (P(x) ∧ Q(x)) ] |⎯ ∃x ¬P(x) ∨ ∃y ¬Q(y)

1. Si en la demostración anterior se ha utilizado el teorema o regla de intercambio, decir en qué líneas de la demostración se utilizó, y para alguna de esas utilizaciones del teorema de intercambio decir cuáles son las equivalencias aplicadas.

a) 1ª solución: utilizando la regla eliminación de la disyunción

1. ¬ ∀x (P(x) ∧ Q(x)) premisa

2. ∃x ¬ (P(x) ∧ Q(x)) ¬∀x A(x) ≡ ∃x ¬A(x)

3. ∃x (¬ P(x) ∨ ¬Q(x)) De Morgan 2 + th intercambio

4. ¬P(a) ∨ ¬Q(a) elim ∃ 3, a constante nueva

5. ¬P(a) supuesto

6. ∃x ¬P(x) int ∃ 5

7. ∃x ¬ P(x) ∨ ∃y ¬ Q(y) int ∨ 6

8. ¬Q(a) supuesto

9. ∃y ¬Q(y) int ∃ 8

10. ∃x ¬ P(x) ∨ ∃y ¬ Q(y) int ∨ 9

11. ∃x ¬ P(x) ∨ ∃y ¬ Q(y) elim ∨ 4, 5-7, 8-10

a) 2ª solución: mediante contradicción

1. ¬ ∀x (P(x) ∧ Q(x)) premisa

2. ∃x ¬ (P(x) ∧ Q(x)) ¬∀x A(x) ≡ ∃x ¬A(x)

3. ∃x (¬ P(x) ∨ ¬Q(x)) De Morgan 2 + th intercambio

4. ¬P(a) ∨ ¬Q(a) elim ∃ 3, a constante nueva

5. ¬( ∃x ¬ P(x) ∨ ∃y ¬ Q(y) ) supuesto

6. ¬∃x ¬ P(x) ∧ ¬∃y ¬ Q(y) De Morgan 5

7. ∀x P(x) ∧ ∀y Q(y) ¬∃x A(x) ≡ ∀x ¬A(x) + doble negación + ...

8. ∀x P(x) elim ∧ 7

9. P(a) elim ∀ 8

10. ¬Q(a) corte 4,9

11. ∀y Q(y) elim ∧ 7

12. Q(a) elim ∀ 11

13. ¬¬( ∃x ¬ P(x) ∨ ∃y ¬ Q(y) ) int ¬ 5, 10, 12

14. ∃x ¬ P(x) ∨ ∃y ¬ Q(y) elim ¬ 13

b) **Teorema de intercambio**:

1ª versión:

**Sea** A una formula y B1 una subfórmula de A, si:

T |⎯ A (1)

|⎯ B1 ↔ B2 (2)

A´ resulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 por B2 (3)

**Entonces**: T |⎯ A´ (4)

2ª versión: exactamente igual a la anterior, pero en el lenguaje español o castellano:

**Sea** A una formula y B1 una subfórmula de A, si:

(1) A es un teorema en una teoría T

(2) B1 es una subfórmula de A

(3) Si se sustituyen en A todas o algunas de las apariciones de B1 por otra fórmula equivalente B2,

**Entonces**, la fórmula resultante A’ también es un teorema en la teoría T

En ambas soluciones se ha utilizado el teorema de intercambio al pasar de la línea 2 a la 3:

2.- ∃x ¬ (P(x) ∧ Q(x))

2.- ∃x B1 con B1 ≡ ¬ (P(x) ∧ Q(x))

como B1 ≡ ¬ (P(x) ∧ Q(x)) es equivalente a B2 ≡ ¬P(x) ∨ ¬Q(x) , De Morgan

3.- ∃x B2

3.- ∃x (¬ P(x) ∨ ¬Q(x))

**Ejercicio 4**. Demostrar por Resolución con UMG que la fórmula ¬E(s(a),s(s(a)))

se deduce a partir del siguiente conjunto de cláusulas:

C1: N(a)

C2: ¬N(x) ∨ N(s(x))

C3: ¬N(x) ∨ ¬E(a,s(x))

C4: ¬N(x) ∨ ¬N(y) ∨ ¬E(s(x),s(y)) ∨ E(x,y)

C5: E(f(x,a),x)

C6: E(s(f(x,s(y))),f(s(x),s(y))

**Solución:**

Se trata de algunos de los axiomas de la aritmética de Peano, donde la constante a representa el número 0, la función s representa el “sucesor”, la función f representa la suma, el predicado N representa el concepto de “ser un número natural”, y el predicado E representa la igualdad.

La afirmación que se pide demostrar es que 1 no es igual a 2.

Negando la conclusión se obtiene una nueva cláusula

C0: E(s(a),s(s(a)))

A continuación se renombran todas las variables para evitar, en la medida de lo posible, problemas con la resolución.

C1: N(a)

C2: ¬N(x2)∨N(s(x2))

C3: ¬N(x3)∨¬E(a,s(x3))

C4: ¬N(x4)∨¬N(y4)∨¬E(s(x4),s(y4))∨E(x4,y4)

C5: E(f(x5,a),x5)

C6: E(s(f(x6,s(y6))),f(s(x6),s(y6))

La refutación es la siguiente:

C7: ¬N(a)∨¬N(s(a))∨E(a,s(a)) (C0,C4) { x4/a, y4/s(a) }

C8: ¬N(s(a))∨E(a,s(a)) (C7,C1) { }

C9: ¬N(a)∨E(a,s(a)) (C8,C2) { x2/a }

C10: E(a,s(a)) (C9,C1) { }

C11: ¬N(a) (C10,C3) { x3/a }

C12: ☐ (C11,C1) { }